Lógica Matemática

13 *Corretude do sistema $\mathcal{L}$* ■

Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

Corretude

Dizemos que um sistema é correto com relação a alguma propriedade (por exemplo, a propriedade semântica de “verdade”) se todos os teoremas deste sistema possuem esta propriedade.

Uma propriedade importante de um sistema matemático é que ele seja correto quanto à verdade (tautologia): queremos que nosso sistema demonstre teoremas verdadeiros.

Neste vídeo, demonstraremos que o sistema $\mathcal{L}$ é correto com relação à propriedade de tautologia.

Valoração

DEFINIÇÃO 1: Uma valoração de $\mathcal{L}$ é uma função v, cujo domínio é o conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ e cuja imagem é o conjunto $\{V, F\}$, tal que, para quaisquer fórmulas A e B de $\mathcal{L}$:

a) $v(A) \neq v(\neg A)$,
b) $v(A \to B) = F$ se e somente se $v(A) = V$ e $v(B) = F$.

Observe que uma atribuição arbitrária de valores às variáveis proposicionais (fórmulas atômicas) de $\mathcal{L}$ nos dá uma valoração.

DEFINIÇÃO 2: Uma fbf A de $\mathcal{L}$ é uma tautologia se para toda valoração v, $v(A) = V$.

Teorema da corretude

<u>TEOREMA 1</u> <u>(da corretude)</u>: Todo teorema de $\mathcal{L}$ é uma tautologia.

Ideia da demonstração:

- Todos os axiomas de $\mathcal{L}$ são tautologias.
- A regra de inferência MP preserva tautologia:
  - Resultado 1 do vídeo 4: Se A e $(A \rightarrow B)$ são tautologias, então B também é uma tautologia.

Teorema da corretude

TEOREMA 1 (da corretude): Todo teorema de $\mathcal{L}$ é uma tautologia.

Demonstração:

A demonstração é por indução no número de fbf's de $\mathcal{L}$ que constituem a prova de um teorema A em $\mathcal{L}$.

Caso base: A prova de A possui uma (1) fórmula.

Nesse caso, A só pode ser um axioma. Basta verificar (construindo a tabela verdade) que todo axioma (instância de axioma) de $\mathcal{L}$ é uma tautologia.

Hipótese indutiva: Todos os teoremas de $\mathcal{L}$ que possuem uma prova com um número menor do que n fórmulas são tautologias.

Tese: Um teorema A com uma prova composta por n fórmulas, $n > 1$, também é uma tautologia.

Pela definição de prova, ou A é uma axioma (nesse caso, já é uma tautologia), ou é conclusão da aplicação de MP a duas fórmulas anteriores .

No segundo, caso, essas fórmulas anteriores devem ter a forma B e $B \rightarrow A$:

1.
2.
$\vdots$
$k. B$
$\vdots$
$l. B \to A$
$\vdots$
$n. A$

Note que B e $B \to A$ são teoremas de $\mathcal{L}$ cujas provas possuem um número menor do que n fórmulas.

Portanto, pela hipótese indutiva, são tautologias.

Pelo resultado 1 do vídeo 4, se B e $B \to A$ são tautologias, então A também é uma tautologia.

Logo, pelo princípio da indução matemática, todo teorema de $\mathcal{L}$ é uma tautologia. ■

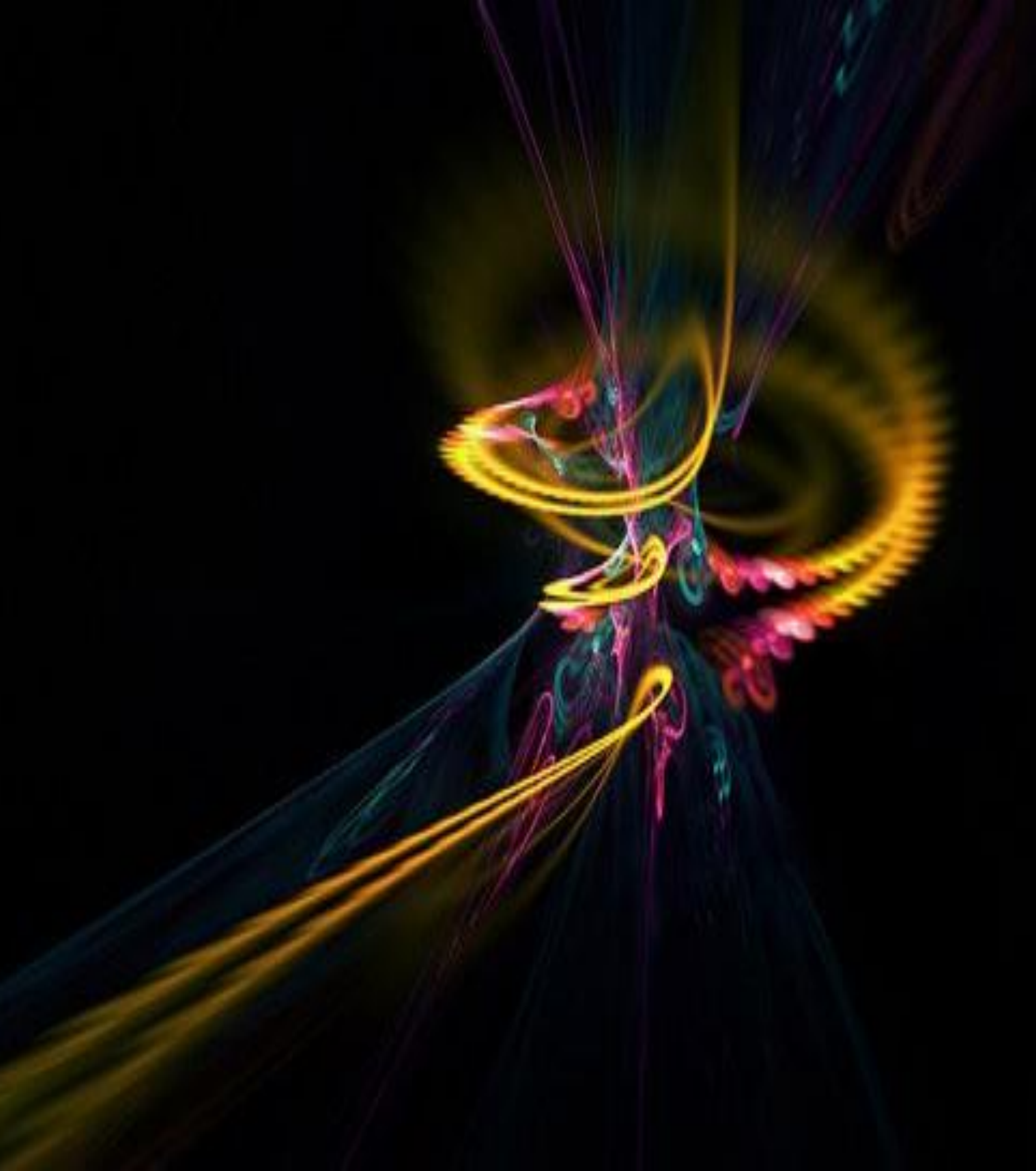
Observação final

É possível demonstrarmos ainda a recíproca do teorema da corretude, isto é, é possível demonstrarmos que toda tautologia é teorema de $\mathcal{L}$.

Para isto, precisaremos introduzir antes outros dois conceitos: extensão e consistência. É o que faremos no próximo vídeo.

Lógica Matemática

13 *Corretude do sistema* $\mathcal{L}$ ■



numeroimaginario.com.br
vinicius@numeroimaginario.com.br